

III GODINA

2003. Opštinsko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Доказати да једначина $x^n + y^n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ нема решења у скупу природних бројева, где је $z \leq n$.

2. Решити систем у зависности од реалног параметра a :

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^x + 2y - 3 \arcsin z &= 7 \\ 2^x - y - \arcsin z &= -6 \\ 5 \cdot 2^x - y + \arcsin z &= 6a + 2. \end{aligned}$$

3. На колико начина се број 2002 може представити у облику збира нерастућих природних бројева (више од једног сабирка) таквих да је и њихов производ једнак 2002?

4. Нека су $b = CA$ и $c = AB$ странице троугла ABC и l_a дужина симетрале угла код темена A . Доказати да, ако важи $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_a}$, онда је $\angle BAC = 120^\circ$.

5. Многоугао који је описан око круга полупречника r , разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника уписаних кругова у те троуглове већа од r .

Трећи разред – Б категорија

1. У паралелограму са странама a , b и оштрим углом α конструисане су симетрале унутрашњих углова. Одредити површину четвороугла одређеног тим симетралама.

2. Решити једначину $4^{\log_{10} x} - 32 + x^{\log_{10} 4} = 0$.

3. На равном столу налазе се три лопте, полупречници r_1 , r_2 , r_3 . Оне додирују се у тачкама A_1 , A_2 и A_3 , редом, и сваке две се међусобно додирују. Ако је $A_1A_2 = 4$, $A_2A_3 = 6$, $A_1A_3 = 8$, наћи r_1 , r_2 и r_3 .

4. У тространој пирамиди $SABC$ сви ивични углови код темена S су прави. Нека је O подношје висине пирамиде из темена S . Ако је површина троугла AOB четири пута већа од површине троугла BOC , наћи однос површина троуглова ASB и BSC .

5. Казаљке на сату су преклопљене тачно у поноћ. Када ће се следећи пут преклопити?
-

2003. Okružno takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Дата је једначина $x^3 - px + q = 0$, $q \neq 0$, која има три реална решења.

а) Доказати да је $p > 0$.

б) Ако је и $q > 0$, доказати да за најмањи по апсолутној вредности корен ове једначине, α , важи $|\alpha| \leq \min\left(\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1 + \frac{1}{100}}$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1 - \frac{1}{100}}.$$

3. Доказати да се у координатној равни не може нацртати конвексни четвороугао, коме је једна дијагонала два пута дужа од друге, угао између дијагонала му је 45° , а координате свих темена су цели бројеви.

4. Дата је тачка P унутар неког круга. Кроз тачку P постављамо две међусобно нормалне тетиве. У ком положају је збир дужина тих тетива најмањи, а у ком највећи и колике су те екстремне вредности, ако је полу пречник кружнице R , а растојање тачке P од центра те кружнице d ($0 < d < R$)?

5. Нека је $a = \frac{2003}{\sqrt{2003}}$. Шта је веће $a^{a^{\dots^a}} \quad \left. \right\} 2003 \text{ пута}$ или 2003 ?

Трећи разред – Б категорија

1. Основице правоуглог трапеза у кога се може уписати круг су a и b . Израчунати површину овог трапеза.

2. У лопту је уписана пирамида, чија је основа правоугаоник дијагонале d . Бочне ивице пирамиде нагнуте су према равни основе под углом β . Наћи полу пречник лопте.

3. Наћи све целе бројеве x , такве да је $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ цео број.

4. Доказати да важи: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

5. Доказати да за $p \geq 0$ важи неједнакост

$$(2003^p)^1 - 2003^p + (2003^{2p})^1 - 2003^{2p} + \dots + (2003^{2003p})^1 - 2003^{2003p} \leq 2003.$$

2003. Republičko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. а) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева a_1, a_2, \dots такав да за свако $k \geq 2$ важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}} ?$$

- б) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$ такав да за свако $2 \leq k \leq 2002$ важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}} ?$$

2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k .
3. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC , који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за странице троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.
4. Нека је $n \geq 3$, а a_1, a_2, \dots, a_n реални бројеви такви да је $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Доказати да важи

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{3} \right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. Колико се највише фигура подударних са  може поставити у таблу 2003×2003 без преклапања тако да свака фигура покрива тачно 4 јединична поља?
-

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати дужину полупречника лопте уписане у тространу пирамиду $SABC$, ако су ивице SA, SB и SC међусобно нормалне и $AB = BC = a, BS = b$.

2. Решити систем у зависности од реалног параметра a :

$$\begin{array}{rcl} ax & + & 6y & + & z & = & 1 \\ x & + & 6ay & + & z & = & 6 \\ x & + & 6y & + & az & = & 1. \end{array}$$

3. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвексног четвороугла. Доказати да важи $P \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$. Када важи једнакост?

4. Нека је E средиште странице AB квадрата $ABCD$, а F и G тачке на страницама BC и CD , редом, такве да је $EF \parallel AG$. Доказати да је FG тангента на круг уписан у квадрат $ABCD$.

5. Ако за оштре углове α, β и γ важи $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$ и $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$, доказати да је $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
-

2004. Opštinsko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Јединични квадрат је подељен на правоугле троуглове. (Троуглови немају заједничких унутрашњих тачака.) Нека је S збир хипотенуза свих тих троуглова. Доказати да је $S \geq 2\sqrt{2}$. Када важи једнакост?
 2. а) Ако је $x \equiv y \pmod{p}$ онда је и $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$. Доказати.
б) Решити једначину $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ у \mathbb{N} .
 3. Једначина

$$x^3 + px + q = 0$$
има комплексан корен $a+bi$, где су $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ и $q, b \neq 0$. Показати да је $aq > 0$.
 4. Доказати да је број

$$n^{2003} + n + 1$$
сложен за сваки природан број n , $n > 1$.
 5. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$
-

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати вредност израза

$$\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$$
без примене калкулатора и таблица.
 2. Доказати неједнакост $(\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} < 2$.
 3. Равни α и β секу се по правој c . Нека је φ угао диедра кога чине те две равни, а ψ угао између неке праве p равни α и праве c . Ако је γ угао између праве p и равни β , доказати да важи

$$\sin \gamma = \sin \varphi \sin \psi.$$
 4. Израчунати вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}.$$
 5. Решити систем једначина у скупу реалних бројева:

$$\begin{aligned} x^3 y^3 z^4 &= 1 \\ x^2 y^4 z^4 &= 2 \\ x^2 y^3 z^5 &= 3 \end{aligned}.$$
-

2004. Okružno takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. У правоугаонiku $ABCD$ је $AB = 1$, $BC = 2$. Дата је тачка P унутар њега таква да је $\angle PAB = \angle PBA = 15^\circ$. Израчунати $\angle CPD$.

2. Ако су m , n и p одсечци које троугао $\triangle ABC$ одређује на правама које садрже средиште уписаног круга а паралелне су, респективно, са страницама $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$, доказати да је

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 2.$$

3. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$, $b_1, b_2, \dots, b_{2004}$ међусобно различити реални бројеви. Ако је за свако $i \in \{1, 2, \dots, 2004\}$

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \dots (a_i + b_{2004}) = \alpha,$$

доказати да, за свако $i \in \{1, 2, \dots, 2004\}$ важи

$$(b_i + a_1)(b_i + a_2) \dots (b_i + a_{2004}) = -\alpha.$$

4. Наћи све просте бројеве p и q , такве да је број

$$\sqrt{p^2 + 14pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$$

природан.

5. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ које за све $x, y \in \mathbb{N}$ задовољавају

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \text{кад је } \frac{x+y}{3} \in \mathbb{N}.$$

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све реалне бројеве x, y, z, t такве да је

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t).$$

2. Наћи сва решења неједначине $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

3. Тачка A припада кругу k полупречника r . Ap и Aq су полуправе такве да је $\angle pAq = 60^\circ$. Ако су B и C пресечне тачке тих полуправих и круга k , наћи дужину тетиве BC .

4. Систем једначина

$$\begin{aligned} bx + ay &= c, \\ cx + az &= b, \\ cy + bz &= a \end{aligned}$$

има јединствено решење. Доказати да је тада $abc \neq 0$ и наћи то решење.

5. Израчунати запремину пирамиде, чија је основа једнакостранични троугао странице a , ако су бочне стране нагнуте према равни основе под угловима α , β и γ .

2004. Republičko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Дат је круг k и његов пречник AB . Нека је P произволна тачка тог круга различита од A и B . Пројекција тачке P на AB је Q . Круг са центром P и полупречником PQ сече круг k у C и D . Пресек правих CD и PQ је тачка E . Нека је F средиште AQ , а G подножје нормале из F на CD . Доказати да је $EP = EQ = EG$ и да су тачке A , G и P колинеарне.
2. У скупу реалних бројева наћи сва решења система једначина

$$x = 1 + \sqrt{y}, \quad y = 1 + \sqrt{z}, \quad z = 1 + \sqrt{x}.$$
3. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такав да

$$n \mid (1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n) + 1,$$
доказати да n није делјив ниједним квадратом већим од 1.
4. Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ је таква да је

$$x + f(x) = f(f(x))$$
за свако $x \in \mathbb{R}$. Наћи сва решења једначине $f(f(x)) = 0$.
5. Дејан је пре x година имао x пута мање година него онда кад је y година раније имао y пута мање године него што има сада, при чему су x , y и број Дејанових година природни бројеви. Колико све година може да има Дејан?

Трећи разред – Б категорија

1. Који је од бројева $2^{\sqrt{\log_2 2004}}$ и $2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$ већи?
2. Наћи висину правилне четворостране пирамиде ако је запремина лопте описане око пирамиде једнака V , а нормала, конструисана из центра те лопте на бочну страну, образује са висином пирамиде угао α .
3. Нека је O средиште описаног круга једнакокраког таугла $\triangle ABC$. Ако је $AB = AC = b$ и $\angle BAC = \alpha$ ($\alpha \neq 120^\circ$). Наћи дужину дужи BD , при чему је D пресечна тачка правих BO и AC .
4. Доказати да за све α и $\beta \neq k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) важи неједнакост

$$\frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \beta} + \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \beta} \geq 1.$$

Када важи једнакост?
5. У зависности од реалног параметра a решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x &+ y - z = 1 \\ 2x &+ 3y + az = 3 \\ x &+ ay + 3z = 2 \end{aligned} .$$

2004. Savezno takmičenje

Трећи и четврти разред

- У троуглу $\triangle ABC$ површине S тачка H је ортоцентар, D, E и F су подножја висина из A, B и C , а P, Q и R тачке симетричне тачкама A, B и C у односу на праве BC, CA и AB , редом. Познато је да троуглови DEF и PQR имају једнаку површину T и да је $T > \frac{3}{5}S$. Доказати да је $T = S$.
- Низ (a_n) одређен је условима $a_1 = 0$ и

$$(n+1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n+1)a_n + 2(3n+1) \quad \text{за } n \geq 1.$$

Доказати да бесконачно много чланова низа припада скупу природних бројева.

- Нека је $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Колико има подскупова B скупа A , таквих да за свако $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ важи: ако $n \in B$ и $n+2 \in B$, онда бар један од бројева $n+1$ и $n+3$ такође припада скупу B ?
- Нека је (a_n) низ одређен условима $a_1 = x \in \mathbb{R}$ и $3a_{n+1} = a_n + 1$ за $n \geq 1$. Нека је

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n - \frac{1}{6} \right], \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \frac{1}{6} \right].$$

Израчунати збир $A + B$ у зависности од x .

2005. Opštinsko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу $\triangle ABC$ тачка D је подножје висине из C , а тачка E подножје висине из D у $\triangle BCD$. Нека је F тачка дужи DE таква да је $DF : FE = BD : DA$. Доказати да су праве CF и AE узајамно нормалне.
 2. У скупу реалних бројева решити једначину $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12$.
 3. Колико решења у скупу ненегативних целих бројева има једначина $\left[\frac{100n}{199}\right] + \left[\frac{100n}{201}\right] = n$?
 4. Нека су a , b и c комплексни бројеви такви да су сва три корена једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ модула 1. Доказати да су сва три корена једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$, такође, модула 1.
 5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно па ручак. Тамо међутим, свако од присутих се посвађа са сваким. Након тога посвађани пеће више отићи у заједничком друштву па ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак па ручак након састанка.
 - а) Да ли је могуће да је комисија која броји 8 чланова одржала укупно 15 састанака (тј. ручкова)?
 - б) Да ли је могуће да је комисија која броји 13 чланова одржала укупно 7 састанака (тј. ручкова)?
-

2005. Okružno takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу $\triangle ABC$, тачка D је средиште странице BC , а тачка E на страници AB таква да је $AE = 2EB$. Ако је $\angle ADC = \angle BDE$, нађи угао $\angle ACB$.
2. Нека је дат природан број a . Доказати да постоји бесконачно много парова природних бројева (b, c) таквих да су $ab+1$, $ac+1$ и $bc+1$ потпуни квадрати.
3. Нека су a, b, c странице произвoльног троугла и α, β углови паспрам страница a и b . Доказати да важи $a \cos \alpha + b \cos \beta \leq c$.
4. Нека су x_1, \dots, x_n позитивни реални бројеви такви да је $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Нађи минималну вредност израза $\frac{x_1^2}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.
5. Дате су три тачке у равни. Нађи круг најмањег полуупречника, који садржи ове тачке.
(Под кругом се подразумева кружница и њена унутрашњост)

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да ни за која три вектора \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} не могу истовремено да важе следеће три неједнакости: $\sqrt{3} \cdot |\vec{a}| < |\vec{b} - \vec{c}|$, $\sqrt{3} \cdot |\vec{b}| < |\vec{c} - \vec{a}|$, $\sqrt{3} \cdot |\vec{c}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.
 2. У зависности од реалних параметара α и β решити систем
$$\begin{aligned}x + y + \beta z &= \alpha + 2\beta \\x + \alpha y + z &= \alpha^2 + \beta + 1 \\x + y + 2\beta z &= \alpha + 3\beta\end{aligned}.$$
 3. Видети 3. задатак за трећи разред А категорије.
 4. Видети 4. задатак за други разред А категорије.
 5. Раван ромба $ABCD$ и раван правоуглог трапеза $DCEF$ су међусобно нормалне ($DC \perp DF$, $DC \parallel EF$, $DC > EF$) и важи $\cos \angle BCE = \frac{1}{3}$, $\frac{DF}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Нађи однос странице ромба и полуупречника уписаног круга ромба.
-

2005. Republičko takmičenje

**

Трећи разред – А категорија

1. Нека $S(n)$ означава збир цифара природног броја n . Наћи све бројеве n такве да је $S(n) = S(2n) = \dots = S(n^2)$.
 2. Нека су E и F тачке на страницима AC и AB троугла ΔABC такве да је $EF \parallel BC$. Доказати да пресечне тачке кругова над пречницима BE и CF припадају висини из темена A .
 3. У четвороуглу $ABCD$ је $\angle DAB = 150^\circ$, $\angle DAC + \angle ABD = 120^\circ$ и $\angle DBC - \angle ABD = 60^\circ$. Наћи $\angle BDC$.
 4. Нека за позитивне реалне бројеве x и y важи $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Доказати да је $x^3 + y^3 \leq 2$.
 5. Доказати да се за свако $n \in \mathbb{N}$, међу свим природним бројевима који садрже у свом декадном запису само цифре 1, 9 и 2 (и при том се свака од њих бар једном појављује у том запису) може наћи бар један који је делив са 2^n .
-

2006. Opštinsko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2.\end{aligned}$$

2. Нади све парове реалних бројева (a, b) такве да је

$$(a + bi)^{2006} = a - bi.$$

3. Између страница троугла постоји релација $a - b = b - c \geq 0$. Доказати да други по величини угао не прелази 60° . (М470)

4. Нека је $a + b + c = 1$ и нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$. (Тап. 34, стр. 8)

5. Постоје ли цели позитивни бројеви x, y и z за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5.$$

Трећи разред – Б категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2.\end{aligned}$$

2. Једнакостранични троугао ABC , странице a , ротира око праве која садржи теме A и паралелна је висини кроз теме B . Израчунати површину и запремину добијеног ротационог тела. (Тап. 37, стр. 37, III.2.)

3. Између страница троугла постоји релација $a - b = b - c \geq 0$. Доказати да други по величини угао не прелази 60° . (М470)

4. Одредити скуп решења неједначине $\sin^4 x + \cos^4 x \leq \frac{3}{4}$. (Тап. 40, стр. 56)

5. На школској табли су слике правилног 12-угла и правилног 15-угла. Оба полигона су уписане у кружнице једнаких полупречника. Ана је обим 12-угла помножила са површином 15-угла а Марија је обим 15-угла помножила са површином 12-угла. Која од њих две је добила већи број?
-

2006. Okružno takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Дат је полином са реалним коефицијентима $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ који има три реална позитивна корена, не обавезно различита. Одредити минималну вредност збира $a + b$. (M401)

2. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 2 \log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) &= 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) &= 1. \end{aligned}$$

3. Наћи све целе бројеве a, b, c, d за које важи $ab + cd = 5$ и $ac - bd = 4$.
4. Дато је n различитих тачака A_1, A_2, \dots, A_n у равни. Нека је \mathcal{S} скуп свих средишта дужи $\overline{A_i A_j}$, $1 \leq i < j \leq n$.
- Доказати да скуп тачака \mathcal{S} има бар $2n - 3$ елемента.
 - Наћи један распоред тачака A_1, A_2, \dots, A_n за који скуп \mathcal{S} има тачно $2n - 3$ елемента.
5. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остale ивице тетраедра остају неизмењене.
 (б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је $V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}$. (M415)
-

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да важи неједнакост

$$2(a^4 + b^4) + 17 > 16ab$$

за $a, b > 0$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{1}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}. \quad (\text{M354})$$

3. Нека су α, β, γ углови троугла. Ако је $\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = 1$ одредити угао α .

4. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остale ивице тетраедра остају неизмењене.
 (б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је $V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}$. (M415)

5. За два различита (неподударна) троугла кажемо да су пријатељски ако имају две једнаке странице. Скуп пријатељских троуглова називамо добрым ако сви троуглови из тог скупа имају исти пар једнаких страница. Одредити минималну вредност за $N, N > 2$, за коју је сваки скуп од N међусобно пријатељских троуглова добар скуп. (M494)
-

2006. Republičko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све вредности природног броја n , за који постоји његов делилац d , тако да $nd + 1$ дели $n^2 + d^2$.

2. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

3. Нaђи све функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да је

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y)),$$

за свако $x \in \mathbb{R}$.

4. Доказати да од укупно 25 ученика није могуће формирати више од $2 \cdot 5^3$ кошаркашких тимова од по 5 играча, тако да број заједничких играча за свака два тима није већи од 2.

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Доказати неједнакост

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су a, b катете и c хипотенуза правоуглог троугла ABC . Израчунати максималну вредност израза $\frac{t_a + t_b}{t_c}$, где су t_a, t_b и t_c дужине тежишних дужи које одговарају, редом, страницима a, b и c троугла ABC .

2. Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$\sin^{2005} x + \cos^{2005} x + \sin^{2006} x \leq 2.$$

Када важи једнакост?

3. Дијагонале AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки E тако да су површине троуглова AED и BCE једнаке. Одредити меру угла ACD , ако су странице троугла ABE у односу $BE : EA : AB = 5 : 6 : 7$.

4. У мрежи коцке су два квадратића суседна уколико имају заједничку страницу (само једна тачка није довољна) и сви квадратићи су међусобно повезани преко суседних. Две мреже коцке су еквивалентне ако једну од друге можемо добити коришћењем ротације и/или симетрије: нпр. мреже

 и  су међусобно еквивалентне, али нису еквивалентне са . Нaђи број нееквивалентних мрежа коцке ивице 1 и пацтвати све такве мреже.

5. Нaђи све тројке (x, y, z) природних бројева таквих да је $x! + y! = 15 \cdot 2^z$.
(M407)

2007. Opštinsko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Једнакокраки трапез чија је висина 12, крак 13, а средња линија 15, ротира око своје краће основице. Израчунати запремину добијеног обртног тела.

Ташгента 41/1, стр. 27

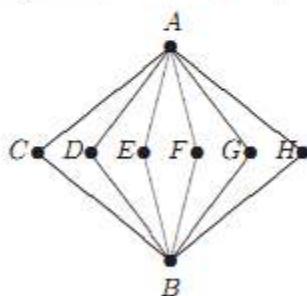
2. Доказати да ни за један природан број n , број $3^{3^n} + 1$ није делив са 41.

3. У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l . Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истом кругу.

4. Једначина $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има један комплексни корен чији је реални део једнак имагинарном делу. Наћи тај корен.

Ташгента 41/1, стр. 29

5. На следећој слици је представљено 8 градова (A, B, C, D, E, F, G, H) који могу бити повезани са 12 путева; $(AC, AD, AE, \dots, AH, BC, BD, BE, \dots, BH)$.



- a) Који је најмањи број асфалтних путева (од тих 12) потребно изградити тако да се из сваког града може стићи у било који други асфалтним путевима?

-
- б) Одредити број различитих начина да се они повежу минималним бројем асфалтних путева (од тих 12), тако да се из сваког града може стићи у било који други асфалтним путевима.
-

2007. Opštinsko takmičenje

Трећи разред – Б категорија

1. Ако је $b = 3^{\frac{1}{1-\log_3 a}}$ и $c = 3^{\frac{1}{1-\log_3 b}}$, доказати да је $a = 3^{\frac{1}{1-\log_3 c}}$.

Тангента 39/3, стр. 40

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{lclclclclcl} 2x & + & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2u & = & 1. \end{array}$$

Тангента 38/2, стр. 40

3. Доказати да је

$$\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

4. Одредити (уз образложење) поредак бројева (поређати их у растућем поретку)

$$a = -2^{-2^{2^2}}, \quad b = -2^{2^{-2^2}}, \quad c = -2^{2^{2^{-2}}}, \quad d = 2^{-2^{-2^2}}, \quad e = 2^{-2^{2^{-2}}}, \quad f = 2^{2^{-2^{-2}}}.$$

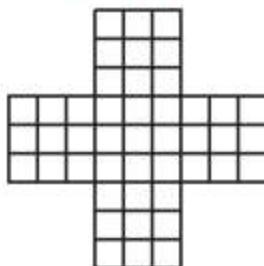
5. Нека су прва четири члана пиза бројеви 1, 9, 9, 3, док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана (1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, ...). Доказати да ће се у том пизу поново, пре или касније, појавити четворка 1, 9, 9, 3. Да ли ће се у том пизу појавити и четворка 7, 3, 6, 7?

Тангента, М567

2007. Okružno takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. Замак има форму неконвексног 12-тоугла (као на слици) са укупно 45 квадратних одаја. Између сваке две одаје које имају заједнички зид постоје врата. Туриста креће из неке одаје и жели да обиђе што више одаја и да се врати у полазну одају, али тако да у сваку одају уђе пајвише једанпут. Колико пајвише одаја он може овако да посети?



2. Наћи све полиноме облика $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \dots \pm x \pm 1$ који имају све корене реалне.
3. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD . Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC , сече дуж AD у тачки K . Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D .

-
4. Наћи све природне бројеве n мање од 100 којима је збир цифара у декадном запису једнак збиру цифара у бинарном запису.

5. Наћи сва реална решења једначине $(2 + \sqrt{3})^x + 1 = (2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}})^x$.
Тангента 34, М340
-

2007. Okružno takmičenje

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ . На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ)

одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан.
Колики је тај збир?

2. За које вредности реалног параметра p једначина

$$\frac{\log px}{\log(x+1)} = 2$$

има јединствено решење?

3. Нека је $AB = 6\sqrt{2}$ ивица квадратне основе правилне пирамиде $ABCDV$ и $TV = 3$ ћепа висина, где је T пресек дијагонала квадрата $ABCD$. Израчунати угао између праве ℓ одређене са дужи TH и равни α троугла ABV , где је H ортоцентар троугла ABV .

4. Решити систем једначина

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_1 + d + b_1q = 21 \quad a_1 + 2d + b_1q^2 = 22 \quad a_1 + 3d + b_1q^3 = 29$$

где су a_1, b_1, d и q непознати реални бројеви.

Тангента 38, стр. 42

5. Решити неједначину

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0.$$

Тангента 38, стр. 43

2007. Republičko takmičenje

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC у коме је $AB \neq AC$, уписани круг са центром S додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F . Права EF сече праву BC у P . Доказати да је PS нормално на AD .
 2. У троуглу ABC је $AB = AC < BC$. Нека је D тачка на полуправој AB , тако да је $AD = BC$. Ако је $\angle BCA = 4 \cdot \angle DCB$ одредити могуће вредности за $\angle ABC$.
 3. Нека су a и n природни бројеви, $a > 1$, такви да n дели $a^n - 1$. Доказати да тада $(a - 1)n$ дели $a^n - 1$.
 4. У групи људи сваки човек има тачно три познапика. Доказати да је могуће сместити све људе из те групе у две просторије, тако да сваки човек има највише једног познапика у просторији у којој се налази.
 5. Одредити минималну вредност израза $\frac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ при ограничењима $\min\{x(y^2+z^2), y(z^2+x^2), z(x^2+y^2)\} \geq 1 + x + y + z$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
-

Трећи разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P = \{1, 2, \dots, n\}$ је пар $\{A, B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ (партиције $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1} - 1$.
 2. Права r која је паралелна страници AB датог троугла ABC и полови страницу BC сече симетралу s угла ABC у тачки T . Ако је O центар уписаног круга датог троугла, доказати да је
$$\angle OCT = \frac{1}{2} \angle BAC.$$
 3. Доказати да једначина $x + \cos x = 1$ има тачно једно решење у скупу реалних бројева.
 4. Наћи бар једну неконстантну функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољава услов:
$$f(x+2) + f(x) = f(x+1) \text{ за свако } x \in \mathbb{R}.$$
-

5. α, β, γ су оштри углови које дијагонала квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ гради редом са ивицама AA_1 , AB и AD . Доказати неједнакост

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

2008. Opštinsko takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcl} x + y + (1-a)z & = & a, \\ (1-a)x - y + z & = & -1, \\ x + (a-1)y - z & = & 0. \end{array}$$

2. У купу је уписана лопта. Доказати да је однос површина купе и лопте једнак односу њихових запремина.

3. Нека је $x > 0$ реалан број. Одредити поредак бројева (сортирати по величини)

$$x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, x^{x^{x^{x^x}}}.$$

4. Нека је $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ таква да:

$$1^\circ \quad f(1) = 0;$$

$$2^\circ \quad f(p) = 1 \text{ за сваки прост број } p;$$

$$3^\circ \quad f(ab) = af(b) + bf(a) \text{ за све природне } a \text{ и } b.$$

Одредити све n за које је $f(n) = n$.

5. У сваком пољу табле 12×2008 уписан је по један природан број. Једним потезом је дозвољено удвојестручити све бројеве неке врсте или смањити за 1 све бројеве неке колоне. Да ли се увек после неког броја потеза може добити таблица у којој су сви бројеви једнаки 0?
-

Трећи разред, Б категорија

1. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

2. Доказати да једначина

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{x^2} + x^2$$

нема решења у скупу реалних бројева.

3. На кошаркашком турниру учествовало је 8 екипа и свака је са сваком одиграла по једну утакмицу. За победу се добија два поена, а поражена екипа добија 0 поена (нема нерешених утакмица). Екипе су сакупиле редом $14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2$ поена. Колико утакмица су последње четири екипе изгубиле од прве четири екипе?

4. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcl} \log_{|x-y|} \frac{xy}{2} & = & 2, \\ x+y & = & xy+1. \end{array}$$

5. Видети други задатак за трећи разред А категорије.
-

2008. Okružno takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$, симетрала $\angle BAC$ сече BC у тачки D ; права која садржи D и паралелна је са AC сече AB у тачки E ; права која садржи E и паралелна је са BC сече AC у тачки F . Доказати да је $AE = FC$.

2. Испитати да ли је $\operatorname{tg} 1^\circ$ рационалан број.

3. Нека су $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ реални бројеви такви да је

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1.$$

Доказати да је

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \dots + (2n-1)a_n^2 \leq 1.$$

4. На колико се пајмање тетраедара може исечи коцка?

5. L-тромино је фигура састављена од три јединачна квадрата, неког од облика



Одредити пајмање m , тако да је из квадратне мреже димензија 5×5 (састављене од 25 јединачних квадрата) могуће изрезати m L-тромини, а притом се из остатка не може изрезати више ниједан L-тромино. (Приликом изрезивања, квадрати који чине L-тромино се морају поклапати са квадратима мреже.)

Трећи разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geq 1.$$

2. Одредити угао који граде вектори \vec{a} и \vec{b} , ако су вектори $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} + 5\vec{b}$ међусобно ортогонални и $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.

3. Видети трећи задатак за други разред А категорије.

4. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

5. Видети пети задатак за трећи разред А категорије.

2008. Republičko takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. Положај велике и мале казаљке на сату назива се *двооструко могућим* ако ће заменом места велике и мале казаљке оне опет коректно показивати неко време. Колико има двоструко могућих положаја казаљки?

2. Нека је $n > 1$ природан број. Одредити коефицијент уз $x^{\frac{n^2+n-4}{2}}$ у развоју полинома

$$(x+1)^1 \cdot (x+2)^2 \cdot \dots \cdot (x+n)^n.$$

3. У свако поље таблице 8×7 уписан је број па следећи начин: у поље (i, j) које се налази у пресеку i -те врсте и j -те колоне уписан је број $i \cdot (2j + 1)$. У тако добијеној таблици дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 или квадрат 4×4 и повећати за 1 сваки број у пољима изабраног квадрата. Да ли се полазна таблица примепом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни?

4. У скупу природних бројева решити

$$7^x + 12^y = 13^z.$$

5. Нека је $d > 0$ реалан број. Конструисати правоугаоник $MNPQ$ дијагонале $NQ = d$ уписан у дати троугао ABC , тј. правоугаоник коме страница MN припада правој одређеној са AB , а темена P и Q припадају страницама BC и CA , редом.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да се кружнице

$$x^2 + y^2 - 2x - 12y + 12 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + 2x - 9y + 15 = 0$$

додирују изнутра и одредити једначину њихове заједничке тангente.

2. Нека је $SABC$ тространа пирамида, чији су сви ивични углови код врха S прави и нека је O подножје висине из тачке S на равни ABC .

(а) Доказати да је O ортоцентар троугла ABC .

(б) Ако су површине троуглова ABC и OBC једнаке P_1 и P_2 , редом, одредити површину троугла SBC .

3. У скупу реалних бројева решити

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} \right) \geq \operatorname{sgn} \left(\log_x 5^{\sqrt{1-x}} \right)$$

4. Да ли се у равни може конструисати

(а) 2006; (б) 2007; (в) 2008

подударних кружница, тако да свака од њих додирује тачно 3 друге кружнице и никоје две кружнице се не секу?

5. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

2009. Opštinsko takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$10^{-3}x^{\log_{10} x} + x(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x) = x^2 + 3x.$$

2. Нека су x, y, z реални бројеви, такви да је

$$x \geq 4, \quad y \geq 5, \quad z \geq 6 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq 90.$$

Доказати неједнакост $x + y + z \geq 16$. Када се у овој неједнакости достиже једнакост?

3. Нека су m и n различити природни бројеви. Доказати да постоји комплексан број z модула 1 такав да је $|1 - z^m + z^n| \geq 2$.

4. Нека је $n \geq 3$ природан број. Нека су r_1, r_2, \dots, r_n и t_1, t_2, \dots, t_n потпуни системи остатака по модулу n . Доказати да $r_1t_1, r_2t_2, \dots, r_nt_n$ није потпун систем остатака по модулу n .

5. Нека су x_1, x_2, \dots, x_n позитивни реални бројеви, такви да је $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Доказати неједнакост

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geq \prod_{i=1}^n \left(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\right).$$

Када се у овој неједнакости достиже једнакост?

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $m \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcl} x & - & y & + & z & = & 0, \\ x & + & (m-1)y & + & 2z & = & 1, \\ -x & + & 2y & + & (2m-1)z & = & 3, \\ x & + & y & + & 4z & = & 4. \end{array}$$

2. Површина праве купе је четири пута већа од површине њене основе. Одредити однос висине и полу пречника основе те купе.

3. Видети први задатак за други разред А категорије.

4. Видети пети задатак за други разред Б категорије.

5. Видети први задатак за трећи разред А категорије.
-

2009. Okružno takmičenje

Трећи разред, А категорија

- Нека је $n > 2$ природан број. Доказати да важи $\sin \frac{\pi}{n} > \frac{3}{\sqrt{n^2 + 9}}$.
- Нека су a, b и c комплексни бројеви, тако да тачке које им одговарају у комплексној равни представљају темена једнакострашничног троугла. Доказати да једначина $az^2 + bz + c = 0$ у скупу комплексних бројева има бар једно решење јединичног модула.
- Нека је S центар уписане кружнице оштроуглог троугла ABC . Уписане кружница додирује страницу AB тачки X . Права XS сече уписану кружницу у тачки M (различитој од X). Нека је X' пресечна тачка праве CM и странице AB , а L тачка па дужи $X'C$, тако да важи $X'L = CM$. Доказати да су тачке A, L, S колинеарне ако и само ако важи $AB = AC$.
- Одредити највећи заједнички делилац свих елемената скупа

$$\{n^{13} - n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Одредити највећи могући број ловаца који се могу сместити на шаховску таблу димензија 7×7 , тако да сваки од њих напада парно много других ловаца.

Напомена. Ловач напада фигуру ако се налазе на истој (не нужно главној) дијагонали и ако се између њих не налази још нека фигура.

Трећи разред, Б категорија

- Нека је $\vec{a} = (-1, 1, 1)$ и $\vec{b} = (2, 0, 1)$. Одредити вектор \vec{x} , који припада равни одређеној векторима \vec{a} и \vec{b} , ортогоналан је па вектор \vec{b} и важи $\vec{a} \cdot \vec{x} = 7$.
 - Нека су AB и AC тетиве круга полупречника R . Тачка M припада правој AB , а њено растојање од праве AC је једнако AC . Тачка N припада правој AC , а њено растојање од праве AB је једнако AB . Израчунати MN .
 - Одредити све вредности реалног параметра p тако да једначина
$$(p - 1)4^x - 4 \cdot 2^x + (p + 2) = 0$$
има бар једно решење.
 - Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка странице a и нека тачка P полови AB , тачка Q полови BC , а тачка R припада дужи CC_1 , тако да је $CR : RC_1 = 1 : 2$. Одредити обим и површину фигуре која се добија у пресеку равни PQR и коцке.
 - Видети први задатак за трећи разред А категорије.
-

2009. Republičko takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да полином

$$P(x) = (x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1)^{2008} = a_{8032}x^{8032} + a_{8031}x^{8031} + \dots + a_1x + a_0$$

има бар два негативна коефицијента.

2. Кружнице k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B . Тангента па k_1 у A и тангента па k_2 у B се секу у тачки M . Произволна права кроз A сече кругове k_1 и k_2 у тачкама X и Y редом. Ако је $BY \cap MX = P$ и $MA \cap k_2 = Q$, доказати да је $PQ \parallel XY$.

-
3. Нека је $n \geq 3$ природан број и нека су $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ ненегативни реални бројеви такви да је $x_0 = x_1 = 0$, $x_n = x_{n+1} = 1$. Доказати да постоји $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ за које важи:

$$|x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j| \geq \frac{4}{n^2}.$$

4. Одредити све природне бројеве a, b, c , тако да важи $4 \mid a+b$ и $a^2 - 2a = b^2 + c^2$.

5. Четири детета имају чоколаду правоугаоног облика са 10 редова и по 6 коцкица у реду. Свако дете држи чоколаду за један угао, и жели да поједе парче у облику правоугаоника (са страницама паралелним ивицама чоколаде) које садржи тај угао. На колико начина је могуће одломити таква четири парчета, ако чоколада може да се ломи само по линијама између коцкица?
-

Трећи разред, Б категорија

1. У xOy -равни одредити једначине странича троугла ABC , ако су координате тачке $A(0, -9)$, једначина праве која садржи тежишну дуж која одговара темену B је $x + 2y + 13 = 0$, а једначина праве која садржи висину која одговара темену C је $3x + y + 19 = 0$.

2. Нека тачка M припада описаној кружници једнакостратничног $\triangle ABC$. Ако је полупречник ове кружнице R , израчунати $MA^4 + MB^4 + MC^4$.

3. У праву купу полупречника основе $r = 17$ и изводнице $s = \sqrt{545}$ уписана је права тространа призма основних ивица $a = 17$, $b = 10$ и $c = 9$, тако да се темена доње основе налазе у основи купе, а горње на омотачу. Израчунати запремину призме.

4. Колико се највише коња може поставити на шаховску таблу димензија 7×7 тако да се никоја два не туку?

5. Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\log_{x+1} x \geq \log_{x^2+1} x^2 \geq \log_{x^3+1} x^3 \geq \dots \geq \log_{x^n+1} x^n \geq \dots$$

2010. Opštinsko takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_{\sqrt{2}} \log_2 (4^x - 12) \leq 2.$$

2. Одредити највећи заједнички делилац бројева $1 + 2010!$ и $1 + (2010!)!$.

3. Нека је D средиште лука \widehat{BC} описане кружнице ΔABC који не садржи тачку A , а M тачка полигоналне лишије $B - A - C$ пајближе тачки D . Ако је $AC > AB$, доказати да је $CM = \frac{AC - AB}{2}$.

4. Нека је S скуп тачака (x, y) у координатној равни чије су координате цели бројеви који задовољавају $0 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 4$ и пека је одабрана 21 тачка из S . Доказати да постоји правоугаоник чија су темена међу одабраним тачкама, а странице паралелне координатним осама.

5. У ΔABC је $\angle BCA > 90^\circ$ и $\angle CAB < \angle ABC$. Тангента на описану кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P . Нека је M тачка на k , таква да је $PM = PC$ (различита од тачке C), N пресек правих CM и AB , а D пресек описане кружнице ΔAMN и праве AP (различит од A). Доказати да је $CD \parallel AB$.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1 - a, \\ ax - y + z &= -1, \\ x - ay - z &= 0. \end{aligned}$$

2. У лопту је уписана правилна тространа пирамида са правим ивицним угловима при врху. Одредити однос дужина висине пирамиде и полуупречника лопте.

3. Нека је $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ако је

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x + \varphi)}{b} = \frac{\cos(x + 2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x + 3\varphi)}{d},$$

доказати да је $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Колико решења има скуповна једначина

$$X \cup Y = \{1, 2, \dots, n\}?$$

5. Видети први задатак за трећи разред А категорије.
-

2010. Okružno takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да је природан број $n \geq 4$ прост ако и само ако $n \mid \sum_{k=1}^{n-3} (k \cdot k!)$.

2. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_{2010} \in \mathbb{C}$ све пуле полинома $x^{2010} + 20x + 2$. Израчунати $x_1^{2011} + x_2^{2011} + \dots + x_{2010}^{2011}$.

3. Нека је $n \geq 3$ природан број. Испитати истинитост тврђења:

Ако за међусобно различите комплексне бројеве z_1, z_2, \dots, z_n за које је $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n|$ важи $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$, тада су тачке одређене комплексним бројевима z_1, z_2, \dots, z_n (у неком поретку) темена правилног n -тоугла.

4. Колико има подскупова скупа $\{1, 2, \dots, 10\}$ који не садрже три узастопна природна броја?

5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао. Нека је $\{P_1\} = AB \cap ED$, $\{P_2\} = BC \cap EA$, $\{P_3\} = CD \cap BA$, $\{P_4\} = DE \cap CB$ и $\{P_5\} = EA \cap DC$. Кружнице описане око троуглова P_1AE , P_2BA , P_3CB , P_4DC и P_5ED секу се у тачкама A' , B' , C' , D' и E' различитим од тачака A , B , C , D и E . Доказати да су тачке A' , B' , C' , D' и E' конциклиичне.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да за све векторе \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} важи

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} &= (\vec{c} + \vec{a}) \times (\vec{a} + \vec{b}) \\ &+ (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}) \\ &+ (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a}). \end{aligned}$$

2. Ако је r полупречник основе и H висина праве кружне купе, а ρ полупречник сфере уписане у ту купу, доказати да важи $\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{\rho H}$.

3. Одредити све $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ који су решења система

$$\cos x = 2 \cos^3 y, \quad \sin x = 2 \sin^3 y.$$

4. Видети трећи задатак за други разред А категорије.

5. Видети пети задатак за други разред Б категорије.

2010. Republičko takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$ тачке M и N су пресеци тежишне дужи и симетрале унутрашњег угла из темена A са страницом BC , редом. Тачке Q и P су тачке пресека нормале у N на NA са правама MA и BA , редом, а тачка O је пресек нормале у P на AB са правом AN . Доказати да је $QO \perp BC$.

2. Нека је са $\overline{a_n b_n}$ означен двоцифрени број који представља последње две цифре броја $1^{2010} + 2^{2010} + \dots + n^{2010}$, за $n \in \mathbb{N}$ (у декадном запису). Одредити да ли је број $0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$ рационалан.

3. Колико решења има функционална једначина $f(n) + f(n + f(n)) = n$ ако:

$$(a) \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0; \quad (b) \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}?$$

4. Нека је низ $(f_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $f_1 = 1, f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \in \mathbb{N}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ уредити бројеве $f_k f_{n-k}$ ($1 \leq k \leq n-1$) у неопадајући низ.

5. На табли је записан систем

$$\begin{array}{ccccccccc} *x_1 & + & *x_2 & + & \dots & + & *x_{2010} & = & * \\ *x_1 & + & *x_2 & + & \dots & + & *x_{2010} & = & * \\ & & & & \vdots & & & & \\ *x_1 & + & *x_2 & + & \dots & + & *x_{2010} & = & * \end{array}$$

који садржи 2010 јединачина. Аца и Бранко, наизменично, уместо једне звездице уписују реалан број по избору. Аца игра први. Који од играча има победничку стратегију ако:

- (a) Аца побеђује у случају да систем има бескапацно много решења, а Бранко у случају да је противречан;
- (b) Аца побеђује у случају да је систем противречан, а Бранко у случају да систем има бескапацно много решења?

Трећи разред, Б категорија

1. Две странице троугла припадају правим $3x + 5y - 14 = 0$ и $x + 3y - 5 = 0$, а ортоцентар тог троугла је $H(1, 1)$. Одредити јединачину праве којој припада трећа страница троугла.

2. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n такав да је $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin n^\circ} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos n^\circ} = 4\sqrt{2}$.

3. Нека је $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 + 1| = |z + i|\}$. Доказати да за произвољне $z_1, z_2 \in S$ важи $|z_1 - z_2| \leq 3$. Испитати када се достиже једнакост.

4. Нека је са $\overline{a_n b_n}$ означен двоцифрени број који представља последње две цифре броја $1 + 2 + \dots + n$, за $n \in \mathbb{N}$ (у декадном запису). Одредити да ли је број $0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$ рационалан.

5. Нека је S скуп тачака у равни, такав да за сваке две тачке $A, B \in S$ постоји тачка $C \in S$ на кружници чији је пречник AB , различита од тачака A и B . Доказати да је скуп S бескапацан.

2011. Opštinsko takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. На табли су написани бројеви $1, 2, \dots, 30$. Опда су избрисана два броја и написана је њихова разлика (од већег је одузет мањи број). Овај поступак је попављан све док на табли није остао само један број. Одредити парност овог броја.

2. Нека су ABC и $A'B'C'$ троуглови такви да је $\angle BAC = \angle B'A'C' = 60^\circ$. Доказати да је

$$2 \cdot BC \cdot B'C' \geq AB \cdot A'B' + CA \cdot C'A'.$$

3. На табли је записан полином $x^2 + 2010x + 2011$. У сваком кораку полином $f(x)$ који је записан на табли можемо заменити полиномом

$$x^2 \cdot f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ или } (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Да ли после копачко много корака на табли може бити записан полином $x^2 + 2011x + 2010$?

4. Четвороугао $ABCD$ је уписан у круг. На луку CD , који не садржи тачке A и B , налази се произвољна тачка M . Нека дужи MA и MB секу страницу CD у тачкама X и Y , редом. Доказати да однос

$$\frac{DX \cdot CY}{XY}$$

не зависи од положаја тачке M .

5. Дат је низ бројева

$$mp + 1, mp^3 + 1, mp^5 + 1, \dots$$

где је p прост, а m природан број.

а) Доказати да се у овом низу налази највише један потпун квадрат.

б) Да ли се у овом низу мора налазити потпун квадрат?

2011. Opštinsko takmičenje

Трећи разред, Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра m за које систем једначина

$$2x + 3y + 2z + 3t = 0$$

$$3x + 2y + 3z + 2t = 0$$

$$2x + 2y + 3z + 3t = 0$$

$$3x + 3y + 2z + mt = 0$$

има бесконачно много решења у скупу реалних бројева.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cdot \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

-
3. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_x(x^3 + 1) \cdot \log_{x+1} x > 2.$$

4. Око лопте је описана права зарубљена кружна купа. Доказати да је однос запремине лопте и запремине купе једнак односу површине лопте и површине купе.

5. Сваки члан породице Топаловић или увек говори истину или увек лаже. Аксентије, Милутин и Лаки (Милутин је Аксентијев син, а Лаки Милутинов) су дали по једну изјаву везану за њих тројицу:

p : Оба оца или увек говоре истину или оба оца увек лажу.

q : Један син увек лаже, а други син увек говори истину.

r : Изјаве p и q пису обе лажне.

- a) За кога од њих тројице са сигурношћу можемо утврдити да ли говори истину или лаже?

- б) За кога од њих тројице са сигурношћу можемо утврдити коју је изјаву (од p, q, r) дао?
-

2011. Okružno takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. На страници AD правоугаоника $ABCD$ ($AB < BC$) изабрана је тачка E тако да је $BE = BC$. Нормала из темена C на дијагоналу BD сече продужетак странице AB у тачки F . Доказати да је троугао BEF правоугли.

2. Који је пајвећи број жетона који се могу поставити на шаховску таблу димензија 2012×2012 (на свако поље се поставља највише један жетон) тако да на свакој хоризонтали, вертикални и дијагонали ове табле буде паран број жетона?

(Под дијагоналом шаховске табле подразумевамо низ поља табле чији центри леже на правуј која је паралелна са једном од две дијагонале квадрата који чини границу табле. Такође, свако од четири угаона поља табле је дијагонала шаховске табле.)

3. Нека је P раван. Доказати да не постоји пресликавање $f : P \rightarrow P$ такво да за сваки конвексан четвороугао $ABCD$ равни P , тачке $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ и $f(D)$ чине темена конкавног четвороугла.

(Величине углова четвороугла су различите од 180° .)

4. Нека је $A = (2011 + i)^{2010} + (2011 - i)^{2010}$.

(а) Доказати да је A цео број.

(б) Одредити остатак при дељењу броја A са 101.

5. Низ $\{a_n\}_{n \geq 0}$ реалних бројева задовољава $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и

$$2a_n + 3a_{n+2} \leq 5a_{n+1}, \text{ за све } n \geq 0.$$

Доказати да за све $n \geq 0$ важи $a_n \leq 3 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$.

2011. Okružno takmičenje

Трећи разред, Б категорија

1. Око дате лопте описана је права призма чија је основа ромб. Најдужа дијагонала призме гради са равни основе угао α . Нађи оштар угао ромба.
2. Колико има четвороцифрених бројева који се у бројном систему са основом 10 записују помоћу највише две различите цифре?
3. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{x - 2} + x > 3.$$

-
4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$4^{x \arcsin x} + 4^{x \arccos x} = 2^{\frac{2+\pi x}{2}}.$$

5. Нека су па крацима AB и AC једнакокраког троугла ABC изабране тачке M и N , редом. Права која садржи средиште дужи MN и паралелна је основици BC сече краке у тачкама K и L . Доказати да је дужина ортогоналне пројекције дужи MN на основицу троугла једнака дужини дужи KL .
-

2011. Republičko takmičenje

Трећи разред, А категорија

1. Нека су a_1, a_2, \dots, a_n пуле полинома $1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Пропаћи најмањи природан број m такав да тачке $a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m$ у комплексној равни леже на истој правој, ако је:
 - а) $n = 2011$;
 - б) $n = 2010$.
2. Матрица 2011×2011 се зове златна ако је попуњена бројевима 1, 2, 3, 4 и ако се у сваком квадрату 2×2 сваки од бројева 1, 2, 3, 4 појављује тачно једном. Одредити укупан број златних матрица.
3. Одредити најмањи природан број m такав да се бројеви $1^m, 2^m, \dots, 2010^m$ могу поређати на кружици па такав начин да је збир свака два суседна броја са кружице делјив са 2011.
4. Нека је D подножје висине из темена A оштроуглог троугла ABC . Уочимо тачке E и F на страници BC такве да је $BD = CE$ и $\angle CAE = \angle BAF$. Нека је Q друга пресечна тачка праве AF и круга описаног око $\triangle ABC$. Ако су M и N , редом, средишта страница AB и AC , доказати да се кругови описани око $\triangle ABC$ и $\triangle MNQ$ додирују.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да је број $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ делјив са 56 за свако $n \in \mathbb{N}$.
2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$2 \log_{\frac{1}{2}} \left(4^{\sqrt{x^2-1}} - 1 \right) - \log_{\frac{1}{2}} \left(4^{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2} \right) \geq -1.$$

3. Дат је четвороугао $ABCD$. Нека је $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$, $\angle CDA = \delta$ и P површина четвороугла $ABCD$.

а) Доказати да је

$$16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cdot \cos(\beta + \delta).$$

б) Нека је $A'B'C'D'$ тетиван четвороугао коме су дужине страница a, b, c и d . Доказати да је површина четвороугла $A'B'C'D'$ не мања од P .

4. Тачке које одговарају комплексним бројевима a, b, c, a^2, b^2, c^2 (у неком поретку) чије темена правилног шестоугла чији је центар тачка која одговара броју 0. Доказати да је $abc = -1$.

5. Група разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су пумерисане бројевима 1 до 5. Преко дана они остављају благо у једној од ових пећина, а поћу га премештају у једну од суседних пећина (ако је благо у пећини са бројем k , $1 < k < 5$, премешта се у пећину са бројем $k-1$ или у пећину са бројем $k+1$; ако је у пећини са бројем 1, онда се премешта у пећину са бројем 2; ако је у пећини са бројем 5, онда се премешта у пећину са бројем 4). Али Баба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Али Баба има стратегију којом са сигуришћу може да пронађе благо у коначно много покушаја?